

Dualzahlen

Womit rechnet ein Computer?

Man kann ja nicht in ihn hineinsehen. Man könnte im Internet die Antwort suchen. Was da in einem Rechner so vor sich geht, das wird z.B. bei Wkipedia übersichtlich beschrieben. Aber reicht das für euer Verständnis? Wollen wir vielleicht ein wenig üben und uns mit den Dualzahlen praktisch beschäftigen? Ihr stimmt mir sicherlich zu, denn ich kenne eure Begeisterung für Elektronik und weiß ja, wie ihr darauf drängt, alles zu erfahren.

Dualzahlen besagt, dass für ihre Darstellung nur zwei unterschiedliche Ziffern erforderlich sind. Es sind dies 0 und 1. Sie symbolisieren Ja oder Nein, Strom fließt oder nicht, eine Magnetisierung ist vorhanden oder nicht, ein Pit auf der CD wurde gebrannt oder nicht. Man könnte noch vieles anführen, was sich da so alles digital zeigt. Überall trifft man aber auf eine ganz bestimmte Darstellung von Werten, von Zahlen. So kommt es manchmal zu dem Rätsel, dessen Geheimnis nur Spezialisten kennen:

$$1 + 1 = 10$$

Eins und Eins ergibt doch Zwei, würdet ihr spontan sagen. Die Gleichung ist sicherlich falsch!

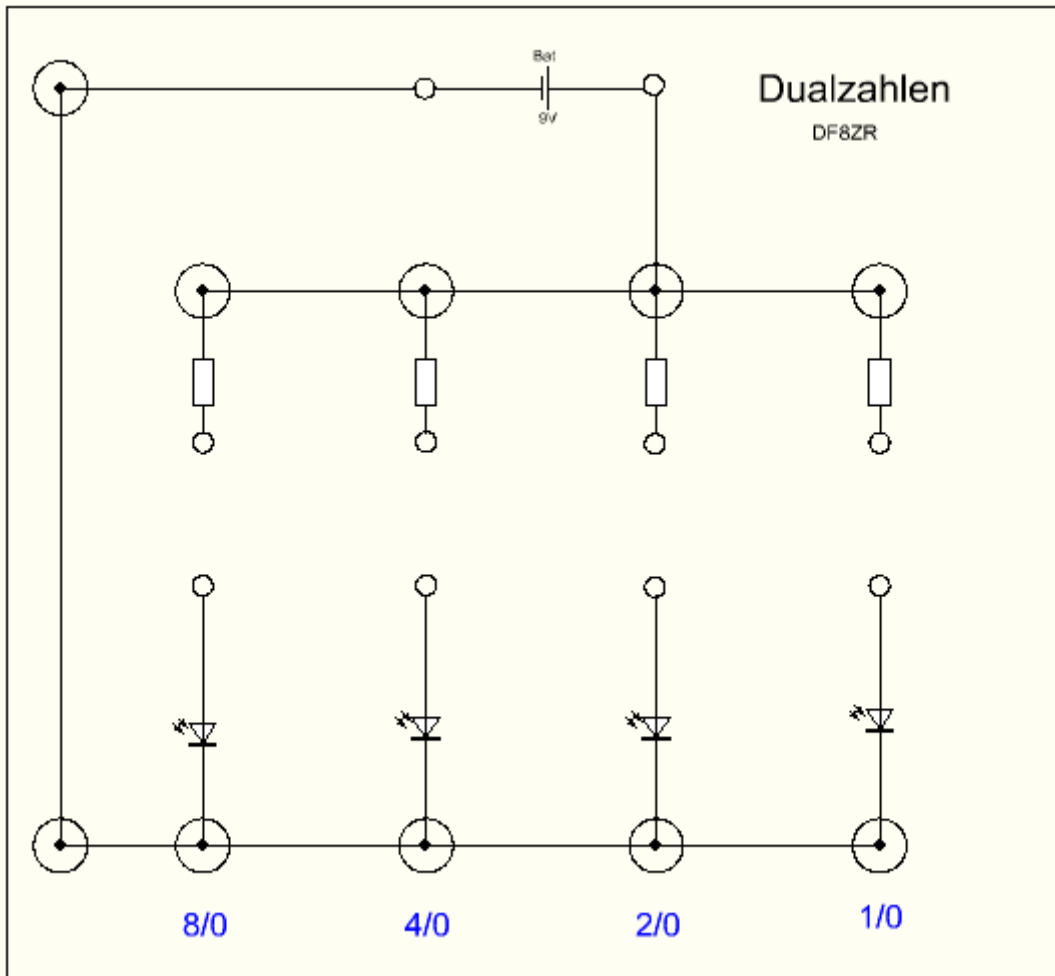
Zahlensysteme

	Dezimalzahlen	Dualzahlen																								
Wertigkeit der Stellen:	<table style="margin: auto;"><tr><td style="text-align: center;">100000</td><td style="text-align: center;">10000</td><td style="text-align: center;">1000</td><td style="text-align: center;">100</td><td style="text-align: center;">10</td><td style="text-align: center;">1</td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td></tr></table>	100000	10000	1000	100	10	1							<table style="margin: auto;"><tr><td style="text-align: center;">32</td><td style="text-align: center;">16</td><td style="text-align: center;">8</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">1</td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td></tr></table>	32	16	8	4	2	1						
100000	10000	1000	100	10	1																					
32	16	8	4	2	1																					
Ziffern:	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1																								

Beispiel: Darstellung der Zahl 13

	Dezimalzahlen	Dualzahlen																								
Wertigkeit der Stellen:	<table style="margin: auto;"><tr><td style="text-align: center;">100000</td><td style="text-align: center;">10000</td><td style="text-align: center;">1000</td><td style="text-align: center;">100</td><td style="text-align: center;">10</td><td style="text-align: center;">1</td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px; text-align: center;">1</td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px; text-align: center;">3</td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td></tr></table>	100000	10000	1000	100	10	1				1	3		<table style="margin: auto;"><tr><td style="text-align: center;">32</td><td style="text-align: center;">16</td><td style="text-align: center;">8</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">1</td></tr><tr><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px; text-align: center;">1</td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px; text-align: center;">1</td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px; text-align: center;">1</td></tr></table>	32	16	8	4	2	1			1	1		1
100000	10000	1000	100	10	1																					
			1	3																						
32	16	8	4	2	1																					
		1	1		1																					
Ziffern:	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 1																								

Alles richtig, weil ihr in einem Zahlensystem denkt, dass euch vielleicht als das allein gültige vertraut ist. Computer aber denken anders. 1 und 0 sind hier nicht als dezimale Zahlen zu verstehen. Man hat nur leider dieselben Symbole verwendet. Ihre Bedeutung ist aber eine andere. 1 heißt, dass der Wert existiert. 0 bedeutet, dass er nicht existiert. Und nun kommt der Trick:

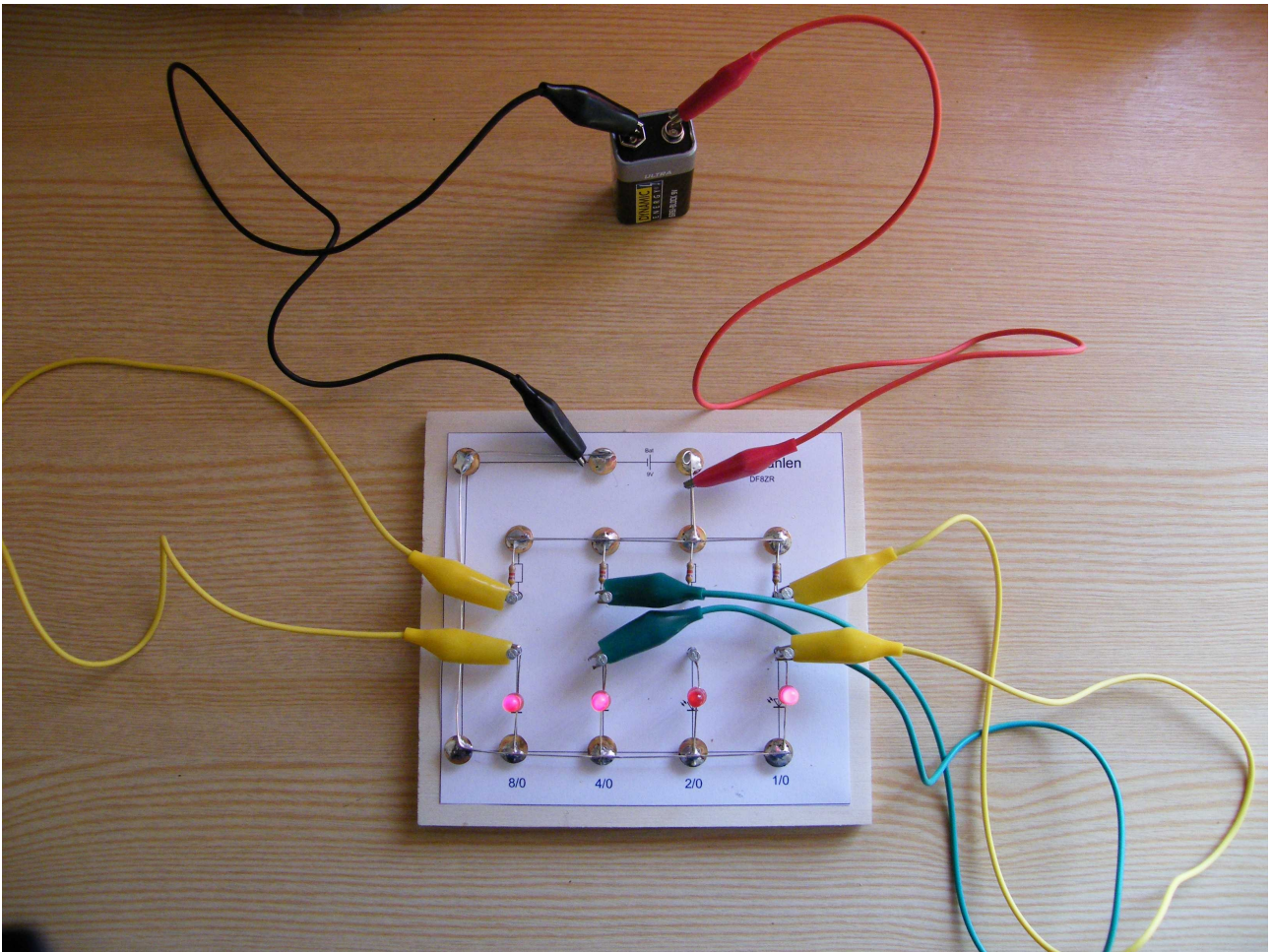


Die bekannten Dezimalzahlen verwenden die Ziffern 0...9. Die Dualzahlen kennen nur zwei Ziffern, 0 und 1. Sie sind praktisch verwendbar, weil in den heutigen Computern nur mit zwei Zuständen gearbeitet wird. Entweder es fließt Strom oder nicht.

Man könnte sich auch mehrere Zustände vorstellen, z.B. oben, mittig und unten. Oder auch rot, grün und blau. Dann könnte man Zahlen mit drei Ziffern bilden. So z.B. mit den Symbolen 0,1,2. Ein solches Zahlensystem könnt ihr euch ja mal selbst ausdenken. Vielleicht gebe ich euch später die Lösung.

In unserem nächsten Experiment wollen wir mal verschiedene Zahlen als Dualzahlen darstellen. Ich habe euch ein Vorlagenbrett gebastelt:

Wenn man die Nägel in der Mitte mit Drähten verbindet, leuchtet die jeweilige LED auf und soll dann die Ziffer 1 darstellen. Die dunklen LEDs sind als Ziffern für die 0 aufzufassen. Von rechts nach links steigt die Wertigkeit. Ich habe sie euch unterhalb der LEDs gedruckt.



Wie stellen wir hier die Zahl 9 ein?

Na, sie setzt sich als Summe von $8 + 1$ zusammen. Wir müssen also die ganz linke und die ganz rechte LED leuchten lassen. Einverstanden?

Wenn euch die Lösung gelungen ist, probiert doch noch weitere Zahlen aus: 6,5,11 und 10.

So, das soll vorerst genügen. Nun aber solltet ihr das anfangs genannte Rätsel lösen können. Was bedeutet

$$1 + 1 = 10 \quad ?$$

Jawohl, es ist die Summe von $1 + 1 = 2$. Und wie stellen wir die 2 im dualen Zahlensystem dar? Natürlich als die Folge 1 und 0! Stellt sie doch mal auf der Vorlage ein.

Der Computer würde euch verstehen. Jetzt seid ihr im Besitz der Lösung und könnt, wenn ihr wollt, andere Schüler mit dieser Weisheit verblüffen. Macht das mal. Aber bitte nicht die Lehrer prüfen, denn Erwachsene haben nicht immer das Allgemeinwissen des 21. Jahrhunderts. Computer gibt es ja erst seit dem letzten Weltkrieg.

Ternäre Zahlen

Nur ein kleiner Ausflug in die Welt der Zahlen. Ich hatte euch ja versprochen, die Zahlen mit der Basis 3 zu erklären. Schaut mal auf das erste Bild. Dort werdet ihr bemerken, dass die Wertigkeit der Stellen von rechts nach links immer mit einem festen Faktor steigt. Bei den Dezimalzahlen ist die nächste Stelle zehn mal so viel wert, wie die Stelle rechts von einer Ziffer innerhalb der Zahl. Bei den Dualzahlen ist dieser Faktor immer 2. Tja, und bei den Ternärzahlen wird deshalb nach dieser Regel der Faktor immer 3 sein. Also

... 81 27 9 3 1

Und wie schreiben wir diese Zahlen? Wir brauchen natürlich wieder drei unterschiedliche Symbole, also Ziffern. In der Sowjetunion hatte man einmal Computer mit diesem Zahlensystem gebaut. Man verwendete i,0,1 als Ziffern. Wir bleiben aber mal bei den uns bekannten:

2,1,0

0 = 0; 1 = 1; 2 = 2; 3 = 10; 4 = 11; 5 = 12; 6 = 20; 7 = 21; 8 = 22; 9 = 100 und 10 = 101 usw.

Als Beispiel wähle ich den Wert, bzw. die Zahl 13

$$13 = 9 + 3 + 1 \rightarrow 111$$

Der Vorteil von drei logischen Zuständen im Computer ist die hohe Zahlendichte. Dadurch wird eine kurze Darstellung von großen Werten mit wenigen Speicherstellen möglich. Die Speicher waren damals allgemein noch teuer. Aber man musste drei elektrische Zustände auswerten: -1, 0, +1. Also waren Bauelemente erforderlich, die das auch erzeugen und lesen konnten. Die Rechenverfahren waren vergleichsweise kompliziert und aufwendig. Deshalb stellte man die Technik bald wieder auf das duale System um.

Solche Schreibweise von Zahlen werdet ihr vielleicht nie mehr anwenden. Deshalb vergesst ihr am besten diesen Ausflug. Und falls ihr es nicht verstanden habt, macht das auch nichts. Die nächste Gruppe von Zahlen solltet ihr aber kennen. Denn diese Zahlen sind in der Elektronik und in der Computerwelt das einzige Verständigungsmittel. Software-Programmierer müssen das Zahlensystem beherrschen. Es heißt **Hexadezimalsystem**.

Hexadezimalzahlen

Was für ein Wort! Das hat aber nichts mit Hexerei zu tun. Und eigentlich wird es für euch auch verständlich sein, weil ihr die Dualzahlen ja bereits kennt.

Betrachten wir mal die Zahlensysteme nach ihrer Länge, nach den Stellen, die sie für eine Zahl brauchen.

Dezimalzahl: $13 = 13 \rightarrow 2$ Stellen

Dualzahl: $13 = 1101 \rightarrow 4$ Stellen

Ternärzahl: $13 = 111 \rightarrow 3$ Stellen

oder anders: Mit zwei Stellen ist der höchste Wert im

Dezimalsystem: 2 Stellen = 99

Dualsystem: 2 Stellen = 3

Ternärsystem: 2 Stellen = 4

Ihr seht also, dass das Dualsystem die meisten Stellen für die Darstellung einer Zahl braucht. Das ist dem Computer heute ziemlich egal, weil er dabei kaum Fehler machen wird. Aber der Mensch ist überfordert, wenn er ihm über eine Anweisung (Programm) große Zahlen mitteilen soll. Man müsste eine lange Kette von Nullen und Einsen fehlerfrei schreiben. Da das kaum gelingt, wäre die Erstellung von Software eine üble Quälerei. Also hat man überlegt, wie man sich die Arbeit erleichtern könnte und ist zu dieser Schreibweise gekommen:

Hexadezimalzahlen verwenden 16 Ziffern: F, E, D, C, B, A, 9 ... 0

Die Grundlage des Zahlensystems ist die Basis 16. Jede Stelle weiter links symbolisiert den 16-fachen Wert der vorangehenden. Damit ist das System mächtiger als das Dezimalsystem, das ja immer nur um das Zehnfache erhöht.

$$13 = 13 \rightarrow 2 \text{ Stellen}$$

$$\text{max. Zahl mit 2 Stellen} = 16 * 16 = 256 - 1 = 255 = \text{FF}$$

Bei den Dezimalzahlen waren es nur $99 = 100 - 1$.

Mit dieser Schreibweise von Zahlen hat man für den Menschen eine Methode gefunden, bei der man mit geringerer Schreibarbeit auskommt, wenn man große Zahlen programmiert. Eine Erleichterung für die Programmierer. Man macht weniger Fehler und die Software wird sicherer. Alles Aspekte einer vernünftigen Lösung, wenn man mit Computern und Elektronik zu tun hat. Das Hexadezimalsystem ist daher in der modernen Technik die Sprache der Zahlen.

Aufgabe:

Wie lautet die Hexadezimalzahl von 1 Million?

$$\begin{array}{rcll} 1\ 000\ 000 & = 1 * 16^4 = 1 * 16 * 16 * 16 = & 983040 = & F0000 \\ + & 4 * 16^3 = 4 * 16 * 16 * 16 = 4096 * 4 = 16384 = & & 4000 \\ + & 2 * 16^2 = 16 * 16 * 2 = 2 * 256 = & 512 = & 200 \\ + & 4 * 16^1 = 4 * 16 = 64 = & & 40 \\ + & 0 * 16^0 = 0 * 0 = 0 & & 0 \end{array}$$

F4240

F4240 ist die gesuchte Hexadezimalzahl.

Fällt euch was auf? Richtig! Man braucht nur 5 Stellen, die Dezimalzahl dagegen 7.

Das Beispiel war sicherlich zu schwierig für den Anfang. Üben wir mal an kleineren Zahlen:

0...9, A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15

$$14 = \quad 12$$

$$8 = \quad 08$$

$$12 = \quad 0C$$

$$25 = 16 + 9 = \quad 19$$

$$46 = 32 + 14 = \quad 2E$$

ASCII

Bis zur Hexadezimalzahl 40 könnte man 64 Werte darstellen. Genügend Vorrat, um alle Klein- und Großbuchstaben zu kodieren. Buchstaben werden so zu Zahlen. Es gelten folgende Codes:

Buchstaben: a = 61, b = 62, A = 41, B = 42

Ziffern: 0 = 30, 1 = 31, 9 = 39

Ihr findet eine Seite für die Umrechnung bei:

<http://www.mml.uni-hannover.de/einhorn/jstools/wepkey.html>

Die Kodierung der Zeichen ist nach einer Tabelle der Organisation

American Standard Code for Information Interchange =**ASCII**

international vereinbart. Daher verstehen alle Computer Buchstaben und Ziffern als 2-stellige Hexadezimalzahlen. Man stellt also alle Schrift mit $2 * 4$ -stelligen Dualzahlen dar.

Z.B. ist der Buchstabe 'a' mit 61 codiert. 61 als Hexadezimalzahl übersetzt der Computer für seine Recheneinheit nach

$$61 = 0110 + 0001 = 0110001$$

Er macht also aus 2 Stellen wieder eine 8-stellige Darstellung, weil er nur mit Nullen und Einsen operieren kann. Aber das macht er ohne fremde Hilfe. Somit kann es uns ja egal sein, wie er sich bemüht. Diese Darstellung nennt man:

Byte

Im Computer wird demnach mit Bytes gerechnet. Ein Byte ist eine zweistellige Hexadezimalzahl oder ein Computer-Wort mit 8 Stellen. Die einzelnen Stellen nennt man auch

Bit

Ein Byte hat 8 Bits(0..7 von rechts nach links numeriert).

Ein Bit ist die Bezeichnung für eine **Informationseinheit**. Die geringste Information, die ich einem anderen Menschen mitteilen kann, ist JA oder NEIN. Mein Freund Fritz ist daheim oder nicht. Also begrenzt sich das Problem auf die Übertragung der Information von JA oder NEIN, bzw. von 1 oder 0. Letztere Kodierung der Information versteht wieder der Computer, weil es seine Sprache ist. Die anderen nur der Mensch.

Auf diese Weise kann ich meinem Freund auch wichtige Informationen fast kostenlos übermitteln. Wir können verabreden, dass wir uns darüber benachrichtigen, ob wir uns am Nachmittag treffen oder nicht, indem wir uns gegenseitig anrufen oder nicht. Dadurch wird keine Gebühr fällig, weil ich ja auf meinem Handy sehen kann, ob er mich angerufen hat. Nur wenn ich abhebe, kostet das was. Sonst aber nichts, selbst wenn ich eine Prepaidkarte verwende. Toller Trick, oder?

Aufgabe:

Wie stellt man den Namen 'Hans' für den Computer lesbar dar?

Lösung in ASCII: 48 61 6E 73

oder als Rechnerwort in 24 Bits '001001000110000101110011'

aber für uns besser zu lesen 0010 0100 0110 0001 0111 0011

Aufgabe:

Versucht mal den Namen 'Peter' zu kodieren!

Lösungsmethode :

Das Alphabet beginnt bei HEX '41' mit den Großbuchstaben. Die Kleinbuchstaben bei HEX '61'. Die Ziffern starten mit '0' bei HEX '30'.

Wenn man das weiß, kann man selbst übersetzen.

Also: 'P' ist der 16. Buchstabe nach 'A', daher

41,42,43,44,45,46,47,48,49,4A,4B,4C,4D,4E,4F,50

50 ist der 16. Wert. Und damit ist die hexadezimale Kodierung für 'P' = '50'.

Setzt man das Verfahren fort, so beginnt die nächste Folge der Kleinbuchstaben bei 'a' = 61.

Zählt bitte selbst weiter und wiederholt das Verfahren für den Rest des Namens.

Aufgepasst: Man muss immer hexadezimal weiterzählen und nicht dezimal!

Die Lösung ist: '5065746572'

So, wenn ihr das alles gerafft habt, seid ihr schon wahre Spezialisten. Vielleicht werdet ihr später Informatiker oder Computertechniker. Das sind Berufe für kreative Denker und Durchblicker.